



PHQ955 Processus et transfert de rayonnement

15 décembre 2009

Autiwa

Table des matières

1	Équation d'état	3
2	Équation de transfert de rayonnement	5
2.1	Définitions	5
2.2	Absorption pure	6
2.3	Émission pure	7
2.4	Équation de transfert en milieu non diffusif	7
2.4.1	Modification de la fonction source par ajout d'un composé chimique	8
2.4.2	Distinction raies/continu	8
2.4.3	Solution formelle	9
2.5	Équation de transfert en milieu diffusif	10
2.6	Équilibre radiatif	11
3	Solutions de l'équation de transfert	11
3.1	Cas plan parallèle	11
3.1.1	Solutions à profondeur intermédiaire	12
3.2	Approximation de diffusion	12
3.3	relation de Schwarzschild-Milne	13
3.4	Cas « gris »	13

1 Équation d'état

Soit μ le poids moléculaire moyen du gaz.

La pression P du gaz est la somme des pressions partielles de toutes les espèces présentes :

$$\begin{aligned} P &= \sum p_i \\ &= p(\text{H}) + p(\text{H}_e) + p(\text{H}^+) + p(\text{H}_e^+) + p(\text{H}_e^{++}) + p(e^-) + \dots \\ &= kT (n(\text{H}) + n(\text{H}_e) + n(\text{H}^+) + n(\text{H}_e^+) + n(\text{H}_e^{++}) + n(e^-) + \dots) \end{aligned}$$

Soit $N_i(X)$ la population de l'espèce X dans son niveau i . Celle-ci vaut :

$$\frac{N_i(X)}{N_0(X)} = \frac{g_i}{g_0} e^{-\chi_i/kT} \quad (1.1)$$

où g_i est la dégénérescence du niveau i et χ_i l'énergie associée au niveau i (en prenant l'état fondamental $i = 0$ pour référence).

On a :

$$\begin{aligned} N(X) &= \sum N_i(X) \\ &= \frac{N_0(X)}{g_0} \sum_{i=0}^{\infty} g_i e^{-\chi_i/kT} \\ &= \frac{N_0(X)}{g_0} Z(T) \end{aligned} \quad (1.2)$$

où $Z(T)$ est la *fonction de partition*.

De plus, on considère qu'il existe aussi des états non liés. On peut donc étendre cette sommation au continuum. On appelle E_i l'énergie d'ionisation. L'énergie totale considérée vaudra donc :

$$\mathcal{E} = E_i + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.3)$$

où v est la vitesse de l'électron éjecté.

Soit $N_j(X)$ la population de l'état j correspondant maintenant à un état du continu :

$$\begin{aligned} \frac{N_j(X)}{N_0(X)} &= \frac{N(X^+, v)}{N_0(X)} \\ &= \frac{g(X^+)g_{e^-}}{g_0(X)} e^{-\frac{E_i}{kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} g_{e^-} &= 2 \times \frac{d^3 v d^3 p}{h^3} \\ &= 2 \times 4\pi p^2 dp \frac{1}{N_e} \frac{1}{h^3} \end{aligned} \quad (1.5)$$

où le facteur 2 rend compte du fait qu'il y a deux projections du spin possibles pour l'électron et N_e est le nombre d'électrons par unité de volume. En effet, l'élément de volume $d^3 v$ contient un seul électron. On a donc $N_e \times d^3 v = 1$. On a donc simplement utilisé cette relation pour remplacer dans le poids statistique.

$$\begin{aligned} \frac{N(X^+, v)N_e}{N_0(X)} &= \frac{g(X^+)}{g_0(X)} \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp e^{-\frac{E_i}{kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \\ &= \frac{g(X^+)}{g_0(X)} \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp e^{-\frac{E_i}{kT}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \end{aligned}$$

On pose $u = \frac{p}{\sqrt{2mkT}}$. Il vient

$$= \frac{g(X^+)}{g_0(X)} \frac{8\pi}{h^3} u^2 (2mkT) du \times \sqrt{2mkT} e^{-\frac{E_i}{kT}} e^{-u^2}$$

On intègre sur toutes les vitesses possibles

$$\frac{N(X^+, \forall v) N_e}{N_0(X)} = \frac{g(X^+)}{g_0(X)} \frac{8\pi}{h^3} e^{-\frac{E_i}{kT}} \int_0^\infty u^2 (2mkT)^{3/2} du \times e^{-u^2}$$

On sait que $I(n) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$ et que $I(2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{a^{3/2}}$

$$= 2 \frac{g(X^+)}{g_0(X)} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (1.6)$$

Si on somme sur tous les niveaux internes (là, je sais pas démontrer cette étape par contre...)

$$\frac{N(X^+) N_e}{N(X)} = 2 \frac{Z(X^+)}{Z(X)} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (1.7)$$

on arrive à la *formule de Saha* pour l'équilibre d'ionisation.

Exemple : Soient des atomes d'hydrogène, des protons (H^+) et des électrons dans une enceinte fermée à température T .

On a un équilibre qui se forme avec la relation suivante :



On a la *formule de Saha*

$$\frac{N(H^+) N_e}{N(H)} = \kappa(T) \quad (1.9)$$

l'électroneutralité

$$N(H^+) = N_e \quad (1.10)$$

et la conservation de la quantité de noyaux :

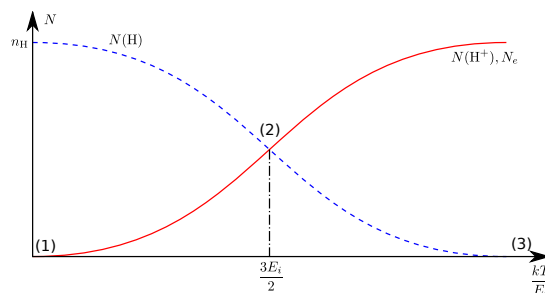
$$N(H) + N(H^+) = n_H = c^{te} \quad (1.11)$$

On utilise (1.10) dans (1.9) :

$$N(H^+)^2 = N(H) \kappa(T) \quad (1.12)$$

que l'on remplace dans (1.11) pour finalement obtenir :

$$N(H^+)^2 + N(H^+) \kappa(T) + n_H \kappa(T) = 0 \quad (1.13)$$



On a

$$\begin{aligned} p_{\text{gaz}} &= p(\text{H}) + p(\text{H}^+) + p_{e^-} \\ &= n(\text{H})kT + n(\text{H}^+)kT + n_{e^-}kT \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$= \frac{\rho kT}{\mu m_H} \quad (1.15)$$

On a essentiellement trois cas de figures comme illustré dans la figure montrant l'évolution des populations en fonction de la température T :

– Cas (1) : basse température

$$\begin{aligned} p_{\text{gaz}} &\sim n(\text{H})kT \\ \mu &= 1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

– Cas (2) : moyenne température

$$\begin{aligned} p_{\text{gaz}} &\sim 3n(\text{H})kT \\ \mu &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (1.17)$$

– Cas (3) : haute température

$$\begin{aligned} p_{\text{gaz}} &\sim 2n(\text{H})kT \\ \mu &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.18)$$

n est un nombre de particule par unité de volume. On a $n = \frac{\rho}{m}$

On a donc un comportement thermodynamique global et la masse moyenne varie en fonction de la température, essentiellement par palier suivant le régime d'ionisation.

2 Équation de transfert de rayonnement

On s'intéresse uniquement aux variations de I_ν dans l'espace (régime stationnaire).

L'équation de transfert est supposée rendre compte des pertes radiatives (absorbé par la matière), des gains (émission par la matière) et de la diffusion (émission + absorption) le long d'un faisceau (d'angle solide $d\omega$), de direction définie \vec{u}_s où on définit une coordonnée s qui augmente au fil de la propagation de la source vers l'observateur ($s = 0$ à la source).

On peut avoir quatre sortes de diffusion :

- diffusion avec changement de fréquence (déplacement d'un photon sur le spectre) ;
- diffusion avec changement de direction (le photon sort du spectre qui correspond à une direction d'observation donnée) ;
- diffusion sans changement ;
- diffusion avec changement de fréquence et de direction que l'on appelle *redistribution complète*.

2.1 Définitions

Soit I_ν l'*intensité spécifique* :

$$I_\nu \equiv I_\nu(\vec{r}, \vec{u}_k, \nu, t) \quad (2.1)$$

On associe à cette grandeur des moments d'ordre q $M_\nu^{(q)}$ définis de la manière suivante :

$$M_\nu^{(q)}(\vec{r}, t) \int d\Omega = \int I_\nu(\vec{r}, \vec{u}_k, \nu, t) \cos^q(\vec{u}_k, \vec{u}_A) d\Omega \quad (2.2)$$

où \vec{u}_k est la direction de propagation du flux lumineux et \vec{u}_A est la normale à la surface.

On définit ainsi l'*intensité spécifique moyenne* J_ν (moment d'ordre 0) :

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega \quad (2.3)$$

le flux H_ν (moment d'ordre 1)

$$H_\nu = \int I_\nu \cos \theta \, d\Omega \quad (2.4)$$

et la pression de rayonnement (intégrée sur les fréquences, elle donne la pression de radiation $p_{\text{rad}} = \int p_\nu \, d\nu$), moment d'ordre 2 :

$$cp_\nu = \int I_\nu \cos^2 \theta \, d\Omega \quad (2.5)$$

2.2 Absorption pure

On considère un milieu purement absorbant. On a donc :

$$I_\nu(s + ds) - I_\nu(s) < 0$$

Dans la limite infinitésimale, on a :

$$I_\nu(s + ds) - I_\nu(s) = Q_{\text{abs},\nu} \times ds$$

En disant que le taux d'absorption est égal à un coefficient d'absorption multiplié par l'intensité spécifique

$$Q_{\text{abs},\nu} = -\alpha_\nu I_\nu(s) \quad (2.6)$$

on obtient :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu(s) \quad (2.7)$$

α_ν est l'extinction ou coefficient d'absorption, exprimé en cm^{-1} .

On peut définir une longueur caractéristique d'absorption l_ν :

$$l_\nu = \left| \frac{ds}{d \ln I_\nu} \right| = \frac{1}{\alpha_\nu} \quad (2.8)$$

Si α_ν varie beaucoup, alors l_ν n'est plus vraiment pertinent.

Remarque : Ce libre parcours moyen dépend de la fréquence. Par exemple suivant la fréquence, l'atmosphère d'une planète extrasolaire absorbera le rayonnement ou non, ce qui aura des conséquences importantes sur les informations que l'on pourra retirer du spectre (accessoirement, le rayon observé ne sera pas le même du coup)

s n'est pas une bonne variable car, par exemple pour le Soleil, il y a de grandes zones dans lesquelles il ne se passe rien. La bonne variable est plutôt le produit $\tau' = s \cdot \alpha_\nu$ que l'on appelle *épaisseur optique*

Si on pose $d\tau' = \alpha_\nu ds$ on obtient des calculs plus simples à effectuer. En contrepartie, l'information spatiale a un peu disparue. En effet, du point de vue de l'épaisseur optique, les calculs sont équivalents à une configuration où tous les milieux absorbants sont collés les uns aux autres en supprimant les zones « vides d'absorption »

On dit que l'épaisseur optique est le point de vue de la source car c'est la cumulation des coefficients d'absorption depuis le point source.

On dit qu'un milieu est *optiquement mince* si

$$T_\nu^{\text{abs}} = \int_0^{s_{\text{obs}}} \alpha_\nu \, ds \ll 1 \quad (2.9)$$

Il est dit *optiquement épais* si

$$T_\nu^{\text{abs}} = \int_0^{s_{\text{obs}}} \alpha_\nu \, ds \gg 1 \quad (2.10)$$

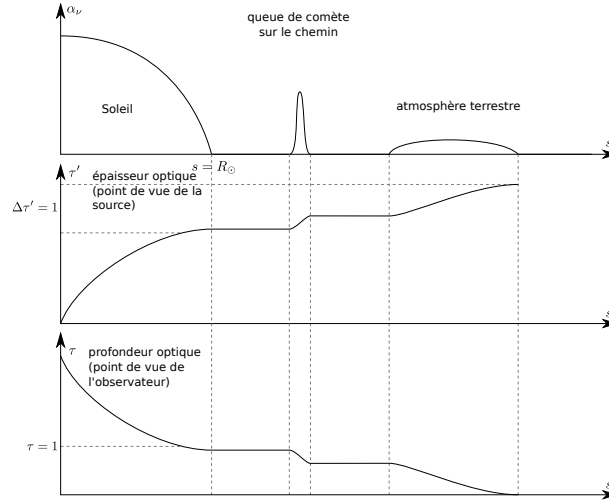


FIG. 1 – Comparaison des approches par coefficient d'absorption et par épaisseur optique pour un trajet donné qui est celui de la lumière du Soleil vers la Terre (où on a rajouté un objet absorbant en cours de route, ici une queue de comète)

Remarque : Dans la pratique, on considère que le milieu est optiquement mince si $T_\nu \lesssim 10$

Dans la pratique, on définit plutôt τ la *profondeur optique* (axe inversé par rapport à τ') :

$$d\tau = -\alpha_\nu ds \quad (2.11)$$

τ est défini tel que $\tau = 0$ au niveau de l'observateur. Il correspond donc au point de vue de l'observateur et est la variable préférentiellement utilisée. On remonte le sens de propagation vers la source et on voit donc l'intensité I_ν augmenter quand τ augmente. τ est le complémentaire de τ' et on a la relation

$$\tau + \tau' = T_\nu \quad (2.12)$$

2.3 Émission pure

On considère un milieu purement émissif. On a donc :

$$I_\nu(s + ds) - I_\nu(s) > 0$$

Dans la limite infinitésimale, on a :

$$\begin{aligned} I_\nu(s + ds) - I_\nu(s) &= Q_{\text{emis},\nu} \times ds \\ &= \epsilon_\nu ds \end{aligned}$$

où ϵ_ν est appelé l'*émissivité* ($[\epsilon_\nu] = ML^{-1}T^{-2}$ ce qui revient à une quantité d'énergie par unité de longueur).

On a donc

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \epsilon_\nu(s) \quad (2.13)$$

2.4 Équation de transfert en milieu non diffusif

On a maintenant de l'émission et de l'absorption ; l'équation devient :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \epsilon_\nu \quad (2.14)$$

qui devient, en faisant apparaître la *profondeur optique* :

$$\frac{dI_\nu}{d\tau} = I_\nu - S_\nu \quad (2.15)$$

où $S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{\alpha_\nu}$ est appelée la *fonction source*.

2.4.1 Modification de la fonction source par ajout d'un composé chimique

On va maintenant chercher à voir comment introduire une nouvelle espèce (absorption + émission) sans avoir à refaire toute l'équation de transfert. Ceci a pour aspect pratique de pouvoir tester si l'espèce va vraiment changer les choses et donc si on va devoir tout refaire.

On a donc

$$\frac{dI}{ds} = -\alpha I + \varepsilon \quad (2.16)$$

en considérant qu'on a N processus d'absorption et M processus d'émission (raies + continuum) :

$$Q_{\text{abs,tot}} = \sum_{i=1}^N Q_{i,\text{abs}}$$

$$Q_{\text{ém,tot}} = \sum_{i=1}^M Q_{i,\text{ém}}$$

On a ainsi

$$\frac{dI}{ds} = -\sum_N \alpha_i I + \sum_M \varepsilon_i$$

$$\frac{dI}{(-\sum_N \alpha_i) ds} = I - \frac{\sum_M \varepsilon_i}{\sum_N \alpha_i}$$

$$\frac{dI}{d\tau} = I - S \quad (2.17)$$

avec

$$d\tau = -\alpha_{\text{tot}} ds \quad (2.18)$$

$$S = \frac{\varepsilon_{\text{tot}}}{\alpha_{\text{tot}}} \quad (2.19)$$

On ajoute ε_{M+1} et α_{N+1} et on regarde comment évolue la fonction source :

$$S' = \frac{\sum_M \varepsilon_i + \varepsilon_{M+1}}{\sum_N \alpha_i + \alpha_{N+1}}$$

on multiplie par $S \times \frac{1}{S}$:

$$= \frac{\sum_M \varepsilon_i}{\sum_N \alpha_i} \times \frac{\sum_M \varepsilon_i + \varepsilon_{M+1}}{\sum_M \varepsilon_i} \times \frac{\sum_N \alpha_i}{\sum_N \alpha_i + \alpha_{N+1}}$$

$$= S \times \left[\frac{\frac{\varepsilon_{M+1}}{\sum_M \varepsilon_i} + 1}{\frac{\alpha_{N+1}}{\sum_N \alpha_i} + 1} \right] \quad (2.20)$$

Ce facteur peut-être supérieur ou inférieur à 1. Quand on trouve une nouvelle molécule, au lieu de tout refaire, on regarde ce rapport pour voir s'il va y avoir une influence. (cette influence dépend de ν)

2.4.2 Distinction raies/continu

En pratique, on fait la distinction entre les raies et le continu. On a donc :

$$\alpha_{\text{tot}} = \sum_{\text{cont}} \alpha_i + \sum_{\text{raies}} \alpha_i \quad (2.21a)$$

$$\varepsilon_{\text{tot}} = \sum_{\text{cont}} \varepsilon_i + \sum_{\text{raies}} \varepsilon_i \quad (2.21b)$$

Du point de vue de la fonction S on peut écrire :

$$S = \frac{\sum_{(c)} \varepsilon_i + \sum_{(r)} \varepsilon_i}{\sum_{(c)} \alpha_i + \sum_{(r)} \alpha_i} \quad (2.22)$$

On définit :

$$S_{(c)} = \frac{\sum_{(c)} \varepsilon_i}{\sum_{(c)} \alpha_i} \quad (2.23a)$$

$$S_{(r)} = \frac{\sum_{(r)} \varepsilon_i}{\sum_{(r)} \alpha_i} \quad (2.23b)$$

$$\eta = \frac{\alpha_{\text{tot},r}}{\alpha_{\text{tot},c}} \quad (2.23c)$$

On arrive à la forme suivante :

$$S = \frac{1}{1 + \eta} (\eta S_{(r)} + S_{(c)}) \quad (2.24)$$

Remarque : Si $\eta \gg 1$ on a $S \sim S_{(r)}$ et si $\eta \ll 1$ on a $S \sim S_{(c)}$.

2.4.3 Solution formelle

On pose :

$$\hat{I}_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu} \quad (2.25a)$$

$$\hat{S}_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu} \quad (2.25b)$$

On a ainsi :

$$\frac{d\hat{I}_\nu(\tau_\nu)}{d\tau} = e^{-\tau_\nu} \left(\frac{dI_\nu(\tau_\nu)}{d\tau} - I_\nu(\tau_\nu) \right) \quad (2.26)$$

D'après l'équation de transfert, on voit apparaître S

$$= -S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau} \quad (2.27)$$

$$\frac{d\hat{I}_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = \hat{S}_\nu(\tau_\nu) \quad (2.28)$$

En intégrant entre τ_0 et τ on arrive à la solution formelle de l'équation de transfert :

$$I(\tau) = I(\tau_0) e^{\tau - \tau_0} - \int_{\tau_0}^{\tau} S(t) e^{-(t - \tau)} dt \quad (2.29)$$

Si on s'intéresse aux photons se propageant selon $-\vec{u}_s$, on peut montrer que l'on obtient l'équation de transfert suivante :

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (2.30)$$

C'est à dire la même équation de transfert que précédemment à un signe près.

On introduit donc $\delta = \pm 1$. δ vaut 1 si la propagation se fait selon \vec{u}_s et -1 si la propagation se fait selon $-\vec{u}_s$.

On a donc une équation de transfert unique :

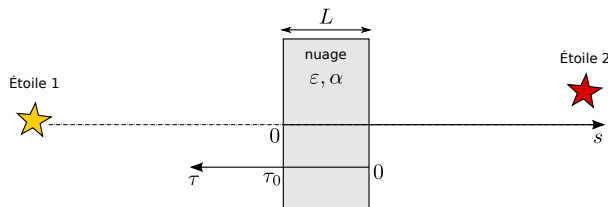
$$\begin{aligned} \delta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} &= I_\nu - S_\nu \\ \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu / \delta} &= I_\nu - S_\nu \end{aligned} \quad (2.31)$$

On retrouve la solution à partir de la solution précédente en disant que $\tau \rightarrow \frac{\tau}{\delta}$:

$$I(\tau, \delta) = I(\tau_0, \delta) \exp\left(\frac{\tau - \tau_0}{\delta}\right) - \int_{\tau_0}^{\tau} S(t) \exp\left(-\frac{t - \tau}{\delta}\right) \frac{dt}{\delta} \quad (2.32)$$

Remarque : $I(\tau)$ est une fausse fonction scalaire car $\delta = \vec{u}_s \cdot \vec{u}_k$ dépend de la direction.

Exemple : Soit un nuage éclairé des deux cotés. On souhaite connaître sa longueur L . On considère que le nuage est isotherme, on a donc $S = S_0 = c^{te}$. On va pour cela écrire l'évolution de l'intensité d'un coté du nuage par rapport à l'autre, et ceci pour les deux sens de propagation $+\vec{u}_s$ et $-\vec{u}_s$.



Pour des photons se propageant selon $+\vec{u}_s$ ($\delta = +1$), on a, d'après (2.31) :

$$I_+(0) = I_+(\tau_0)e^{-\tau_0} + S_0(1 - e^{-\tau_0}) \quad (2.33)$$

où $\tau_0 = \int_0^L \alpha ds$ permet de remonter à la taille du nuage. $I_+(\tau_0)$ représente l'intensité spécifique de l'étoile à la frontière du nuage et est, dans le cas qui nous occupe, l'intensité de l'étoile 1 en $\tau = \tau_0$.

De même, pour des photons se propageant selon $-\vec{u}_s$ ($\delta = -1$), on a :

$$I_-(\tau_0) = I_-(0)e^{-\tau_0} + S_0(1 - e^{-\tau_0}) \quad (2.34)$$

On suppose $I_+(\tau_0)$ et $I_-(0)$ connus (le nuage est donc éclairé par deux étoiles dont les caractéristiques sont connues). On a donc :

$$I_+(0) - I_+(\tau_0)e^{-\tau_0} = S_0(1 - e^{-\tau_0}) \quad (2.35a)$$

$$I_-(\tau_0) - I_-(0)e^{-\tau_0} = S_0(1 - e^{-\tau_0}) \quad (2.35b)$$

En faisant (2.35a)-(2.35b) il vient :

$$e^{-\tau_0} (I_-(0) - I_+(\tau_0)) = I_-(\tau_0) - I_+(0)$$

$$\tau_0 = \ln \left(\frac{I_-(0) - I_+(\tau_0)}{I_-(\tau_0) - I_+(0)} \right) \quad (2.36)$$

Pour remonter à la longueur du nuage, on a donc besoin de deux équations ce qui explique qu'on écrive l'équation de transfert dans les deux sens de propagations, de sorte à exploiter au maximum les conditions au contour qu'on connaît.

Si le milieu est optiquement épais, c'est à dire si $\left| \frac{\tau - \tau_0}{\delta} \right| \gg 1$, alors on a

$$I_\nu \rightarrow S_\nu \quad (2.37)$$

Si le milieu est optiquement mince, c'est à dire si $\left| \frac{\tau - \tau_0}{\delta} \right| \rightarrow 0$, alors

$$I_\nu(\tau) = I_\nu(\tau_0) + S_\nu \frac{\tau_0 - \tau}{\delta} \quad (2.38)$$

2.5 Équation de transfert en milieu diffusif

L'équation de transfert devient alors

$$\frac{dI}{ds} = \epsilon^{\text{therm}} + \epsilon^{\text{diff}} - \alpha^{\text{therm}} I - \alpha^{\text{diff}} I \quad (2.39)$$

Remarque : En rajoutant la diffusion on va augmenter la profondeur optique.

On a

$$\varepsilon^{\text{diff}} = \alpha^{\text{diff}} J_\nu \quad (2.40)$$

En effet, le surplus d'émission dans la direction de propagation et à la fréquence ν va dépendre du coefficient de diffusion α^{diff} et du flux intégré sur toutes les directions de l'espace J_ν .

Soit

$$\alpha^{\text{tot}} = \alpha^{\text{diff}} + \alpha^{\text{th}} \quad (2.41)$$

Soit $\tau_{\text{tot}} = -\alpha^{\text{tot}} s$. L'équation de transfert devient :

$$\frac{dI}{d\tau_{\text{tot}}} = I - S \quad (2.42)$$

avec

$$S = \frac{\varepsilon^{\text{th}} + \alpha^{\text{diff}} J_\nu}{\alpha^{\text{diff}} + \alpha^{\text{th}}} \quad (2.43)$$

En régime de diffusion dominante ($\alpha^{\text{diff}} \gg \alpha^{\text{th}}$), $S_\nu \simeq J_\nu$ (J_ν est l'intensité moyennée sur l'espace).

2.6 Équilibre radiatif

L'*équilibre radiatif* est réalisé quand l'énergie est uniquement véhiculée par les photons.

En équilibre radiatif, un système émet autant qu'il reçoit. Ceci se formalise donc de la façon suivante :

$$\iint \varepsilon_\nu d\Omega d\nu = \iint \alpha_\nu I_\nu d\Omega d\nu \quad (2.44)$$

On a

$$\delta \frac{dI}{d\tau} = I - S \quad (2.45)$$

En intégrant l'équation sur l'angle solide et la fréquence, il vient :

$$\frac{dH_\nu}{ds} = \int \alpha_\nu (J_\nu - S_\nu) d\nu \quad (2.46)$$

Remarque : On repasse à s car τ dépend de ν . On remarque aussi qu'un système en équilibre radiatif a un flux constant.

3 Solutions de l'équation de transfert

3.1 Cas plan parallèle

On considère une stratification dans la direction z et une invariance dans les deux autres directions de l'espace. C'est à dire que pour une strate donnée, toutes les quantités physiques seront constantes (indépendantes de x et y). On se ramène ainsi à un problème unidimensionnel où les quantités physiques ne dépendent que de z .

Soit $\mu = \cos \theta$. On s'intéressera ici à toutes les directions \hat{u}_k possible, donc toutes les valeurs de $\mu \in [-1; 1]$

On généralise de ce fait l'équation (2.31) où δ représentait $\cos \theta$ mais n'avait que deux valeurs discrètes 1 et -1 :

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau\nu} = I_\nu - S_\nu \quad (3.1)$$

dont la solution formelle est, par analogie avec (2.32)

$$I(\tau, \mu) = I(\tau_0, \mu) \exp\left(\frac{\tau - \tau_0}{\mu}\right) - \int_{\tau_0}^{\tau} S(t) \exp\left(-\frac{t - \tau}{\mu}\right) \frac{dt}{\mu} \quad (3.2)$$

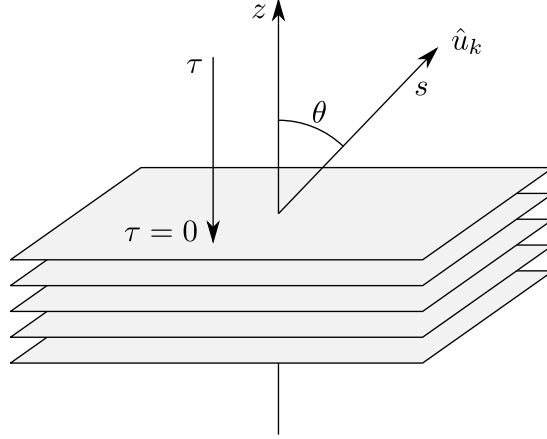


FIG. 2 – Représentation de l'approximation plan-parallèle. z est la direction de stratification et \hat{u}_k la direction du rayonnement qui fait un angle θ avec \hat{e}_z . La profondeur optique est ici définie suivant $-\hat{e}_z$.

3.1.1 Solutions à profondeur intermédiaire

Profondeur intermédiaire signifie qu'on est entre les deux extrémités du système considéré.

Comme précédemment, on considère les photons se propageant dans un sens et dans l'autre ([FIG. 3]), c'est à dire l'intensité pour des valeurs positives ou négatives de μ (on rappelle que $\mu = \cos\theta$). Pour chacune des directions, on prend une origine différente. Dans le cas $\mu > 0$, on prend l'intensité de référence à $\tau_0 = \infty$, c'est à dire à la source considérée. On est dans le cas d'un milieu optiquement épais, donc le terme $I(\tau = \infty, \mu > 0)$ sera écrasé par l'exponentielle décroissante. Pour $\mu < 0$, on prend l'intensité de référence comme l'intensité I^- qui va éclairer le nuage du côté de l'observateur. Pour certains cas, cette intensité sera nulle (cas d'une étoile où on considèrera qu'elle n'est pas éclairée par d'autres objets. Mais dans le cas d'une planète par exemple, cette intensité I^- sera l'étoile autour de laquelle elle tourne).

$$I(\tau, \mu > 0) = \int_{\tau}^{\infty} S(t) e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \quad (3.3a)$$

$$I(\tau, \mu < 0) = I(0, \mu < 0) e^{\frac{\tau}{\mu}} - \int_0^{\tau} S(t) e^{\frac{\tau-t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \quad (3.3b)$$

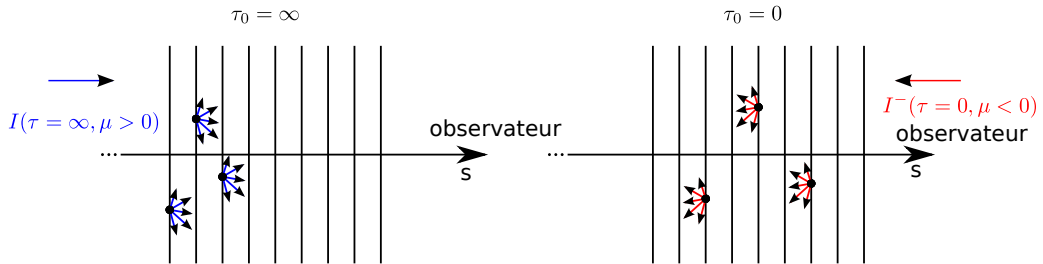


FIG. 3 – Schématisation des cas $\mu > 0$ et $\mu < 0$ dans le cas d'une atmosphère plan parallèle où on recherche des solutions à profondeur intermédiaire.

3.2 Approximation de diffusion

Elle consiste à dire qu'on est en équilibre thermique. On a donc la *loi du rayonnement de Kirchoff*

$$B_{\nu} = \frac{\epsilon_{\nu}^{\text{th}}}{\alpha_{\nu}^{\text{th}}} \quad (3.4)$$

On a alors

$$S_{\nu} \approx B_{\nu} \quad (3.5)$$

Cette approximation où l'on considère que l'on est proche de l'équilibre thermodynamique est valable à grande profondeur optique ($\tau \gg 1$).

On développe alors la fonction source S_ν en puissance de B_ν . **mais j'ai pas compris pourquoi**

$$S_\nu(t) = B_\nu(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (t - \tau)^n \frac{d^n B_\nu}{d\tau^n} \quad (3.6)$$

Il vient

$$J_\nu \simeq I_\nu \quad (3.7a)$$

$$J_\nu \simeq B_\nu \quad (3.7b)$$

$$J_\nu \simeq 3K_\nu \quad (3.7c)$$

L'*approximation d'Eddington* consiste à dire que ceci est vrai même en surface (pour tout τ).

3.3 relation de Schwarzschild-Milne

En utilisant les relations (3.3), on cherche à calculer l'intensité spécifique moyenne J_ν que l'on peut décomposer en deux composantes J_+ et J_- .

On arrive ainsi à la *relation de Schwarzschild*

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_\tau [S_\nu] \quad (3.8)$$

où Λ_τ est l'opérateur définit par

$$\Lambda_\tau(f) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt f(t) E_1(|t - \tau|) \quad (3.9)$$

avec $E_n(x)$ l'exponentielle intégrale d'ordre n

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt$$

On définit de même les relations de Milne

$$H_\nu(\tau_\nu) = \Phi_\tau(S_\nu) \quad (3.10a)$$

$$K_\nu(\tau_\nu) = \chi_\tau(S_\nu) \quad (3.10b)$$

où Φ_τ et χ_τ sont les pendants de Λ_τ mais faisant respectivement intervenir $E_2(x)$ et $E_3(x)$.

3.4 Cas « gris »

Le transfert polychromatique est très compliqué à résoudre. L'approximation du cas gris est d'intégrer sur toutes les longueurs d'onde le coefficient d'absorption pour faire comme s'il n'y avait qu'une seule longueur d'onde.

On se ramène donc à un coefficient d'absorption indépendant de la longueur d'onde

$$\alpha_\nu \rightarrow \alpha_0 \quad (3.11)$$

L'équation de transfert devient :

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S \quad (3.12)$$

Se pose alors la question de savoir quelle valeur de α_0 il faut prendre. On fixe la valeur d' α_0 pour que la valeur d'une variable clé soit bien représentée. Par exemple dans le cas de la *moyenne de Rosseland*, on prend α_0 tel que le flux dans le cas gris soit égal au flux total polychromatique.