



PHQ814 Propriétés Physiques des Matériaux

28 janvier 2009

Autiwa

TABLE DES MATIÈRES

1	Rappels	3
1.1	Équations de maxwell	3
1.2	Dipôles	3
1.3	Milieux diélectriques	4
1.4	Aimantation	5
1.4.1	Paramagnétisme	5
1.4.2	Ferromagnétisme	5
1.4.3	Diamagnétisme	6
1.5	Polarisabilité	6
1.5.1	La polarisation électronique	6
1.5.2	La polarisation atomique ou ionique	6
1.5.3	Polarisation d'orientation	6
1.5.4	Polarisation d'un déplacement macroscopique	6
2	Champ de dépolarisation	6
2.1	Cas particulier d'un condensateur	6
2.2	Cas général	7
3	Champ local et macroscopique	8
3.1	Définitions	8
3.2	Champ de Lorentz	8
3.3	champ local pour un site cubique	10
3.4	Relation de Clausius-Mossotti	10

1 RAPPELS

1.1 Équations de maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.1a)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B}) = 0 \quad (1.1c)$$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.1d)$$

Remarque : Les champs \vec{E} (\vec{E}_{macro} dans le formulaire) et \vec{B} sont les champs macroscopiques. Les particules et atomes, quant à eux, voient le champ microscopique (c'est à dire \vec{E}_{local} dans le formulaire).

Soit \vec{P} la polarisation d'un milieu (celà correspond au moment dipolaire par unité de volume) :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.2)$$

où χ est la *susceptibilité* du milieu. χ est un scalaire dans un milieu LHI, et un tenseur dans le cas général.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ SI} \quad (1.3a)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ SI} \quad (1.3b)$$

Équation de continuité (conservation de la charge) :

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}) = 0 \quad (1.4)$$

où ρ est la densité de charge et \vec{j} la densité de courant.

1.2 Dipôles

Un dipôle électrique est un ensemble de deux charges ponctuelles opposées $-q$ et $+q$ ($q > 0$) placées respectivement aux points N et P séparés par une distance $NP = a$ très petite par rapport à toute distance considérée par la suite ($r \gg a$).

DÉFINITION 1 (MOMENT DIPOLAIRE)

$$\vec{p} = |q| \overrightarrow{NP} \quad (1.5)$$

DÉFINITION 2 (POTENTIEL CRÉÉ PAR UN DIPÔLE)

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (1.6)$$

DÉFINITION 3 (CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉ PAR UN DIPÔLE)

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \left\{ 3 \left(\vec{p} \cdot \hat{r} \right) \hat{r} - \vec{p} \right\} \quad (1.7)$$

Remarque : Il y a une symétrie cylindrique autour de l'axe du dipôle, il paraît donc judicieux de traiter les problèmes en coordonnées cylindriques.

Si on applique un champ \vec{E}_0 , celui-ci va induire, au sein de chaque particule, un moment dipolaire du fait du déplacement du nuage électronique. Chaque atome va donc avoir un champ électrique supplémentaire \vec{E}_p appelé *champ dépolariseur*. Le champ total \vec{E}_{macro} , appelé *champ macroscopique*, sera la somme de ces deux champs :

$$\vec{E}_{\text{macro}} = \vec{E}_p + \vec{E}_0 \quad (1.8)$$

1.3 Milieux diélectriques

Les milieux *conducteurs* sont caractérisés par l'existence de charge libre (électrons dans les métaux, ions dans les électrolytes,...). À l'équilibre électrostatique, le champ interne \vec{E} est nul et la densité volumique de charge est nulle. Le champ ne pénètre pas dans le milieu conducteur, seul les charges en surface et surtout la forme de la surface du milieu jouent un rôle.

Dans les *isolants* ou *diélectriques*, le champ électrique pénètre à l'intérieur du matériau et agit sur les porteurs de charges de la matière, mais les porteurs de charges ne peuvent pas se déplacer librement sous l'effet du champ : ils restent attachés à des groupements atomiques, d'où leur nom de *charge liée*.

Un *isolant* (ou *diélectrique*), soumis à un champ électrique contient une distribution de dipôles électriques, et cette densité de dipôles est caractérisée par le vecteur *polarisation* \vec{P} .

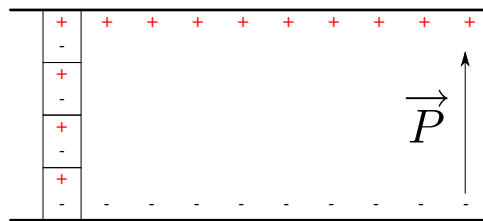


FIG. 1 – Exemple d'une plaque diélectrique

Exemple : Prenons par exemple une plaque diélectrique (voir figure 1) soumise à une polarisation \vec{P} , alors on peut considérer qu'il s'agit d'un empilement de dipôles. Les charges + et - se compensent exactement dans tout le volume. La densité volumique de charges y est nulle partout. Sur les faces, il reste deux couches de charges liées non compensées.

Cet exemple suggère que :

- une polarisation uniforme ne donne naissance qu'à des charges superficielles (densité surfacique σ_p) ;
- si on suppose que la polarisation n'est pas uniforme, alors on a des charges de polarisation superficielles et aussi volumiques, caractérisées par ρ_p .

On montre que

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{P}) \quad (1.9)$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (1.10)$$

où \vec{n} est le vecteur normal dirigé vers l'extérieur du diélectrique.

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{liées}}) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{libre}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{P})) \\ \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{P}) &= \rho_{\text{libre}} \\ \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= \rho_{\text{libre}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Pour faire disparaître la densité de charges liées, on introduit le champ vectoriel \vec{D} appelé **excitation électrique** ou **déplacement électrique** par

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.12)$$

L'équation de Maxwell-Gauss devient :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{D}) = \rho_{\text{libre}} \quad (1.13)$$

Dans de nombreux diélectriques, la polarisation qui apparaît sous l'influence d'un champ électrique pas trop intense est proportionnelle à ce champ. On a alors

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.14)$$

où χ est une grandeur sans dimension appelée *susceptibilité diélectrique* du milieu.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \\ &= \varepsilon \vec{E} \end{aligned}$$

où $\varepsilon_r = 1 + \chi$ est la permittivité relative, et $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ la permittivité absolue du milieu.

Remarque : L'indice optique n d'un milieu est défini par

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (1.15)$$

1.4 Aimantation

1.4.1 Paramagnétisme

En physique, on parle de *paramagnétisme* pour désigner le comportement d'un milieu qui ne possède pas d'aimantation spontanée mais qui, sous l'effet d'un champ magnétique, acquiert une aimantation dirigée dans le même sens que le champ et proportionnelle à son intensité. Cette aimantation disparaît quand le champ est coupé. Un matériau paramagnétique possède donc une susceptibilité magnétique positive; elle est en général assez faible.

Le paramagnétisme ne désigne pas une propriété intrinsèque d'un matériau mais un comportement en réponse à un champ magnétique.

1.4.2 Ferromagnétisme

Le *ferromagnétisme* est la propriété qu'ont certains corps de s'aimer très fortement sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, et pour certains (les aimants, matériaux magnétiques durs) de garder une aimantation importante même après la disparition du champ extérieur.

Lorsqu'un matériau est ferro ou ferrimagnétique, il est divisé en domaines, appelés *domaines de Weiss*, à l'intérieur duquel l'orientation magnétique est identique. Ce domaine se comporte alors comme un aimant. Ces domaines sont séparés par des parois dites *parois de Bloch*.

- Ces domaines n'existent pas lorsque les dimensions du matériau sont très faibles (quelques nm). Ces matériaux sont dits nanocristallins.
- Le déplacement de ces parois est responsable des phénomènes d'hystérésis.

1.4.3 Diamagnétisme

Le *diamagnétisme* résulte du phénomène d'induction de Faraday. Quand on applique un champ magnétique, il induit un courant de telle sorte que le champ magnétique induit qui en résulte s'oppose à champ magnétique appliqué. Ici, c'est la même chose, et le champ magnétique qui en résulte est plus faible que le champ magnétique appliqué. La susceptibilité magnétique des matériaux diamagnétiques est inférieure à 0 ($\chi_m < 0$).

Remarque : Les matériaux *supraconducteurs* sont dits *diamagnétiques parfaits* car toute variation de champ magnétique entraîne en leur sein des courants induits qui ne sont pas amortis du fait de l'absence de résistance. Ces courants induits créent un champ magnétique induit qui compense exactement la variation du champ magnétique extérieur. Cette propriété est utilisée pour réaliser la lévitation magnétique des supraconducteurs.

1.5 Polarisabilité

La polarisation d'un milieu matériel par un champ \vec{E} est lié à une rupture de l'équilibre électrique qui existait avant l'action du champ. En l'absence de champ, les corps solides, liquides ou gazeux sont généralement neutres, et la répartition des charges est telle que le moment dipolaire volumique d'un élément macroscopique est nul.

1.5.1 La polarisation électronique

Elle est liée à la modification de la répartition de charge interne à chaque atome ou ion; elle est toujours présente, quel que soit l'état du matériau.

1.5.2 La polarisation atomique ou ionique

Elle concerne des déplacements des atomes ou des ions par rapport à leur position d'équilibre dans l'édifice auquel ils appartiennent.

1.5.3 Polarisation d'orientation

Le moment dipolaire d'un édifice rigide, atomique ou moléculaire, s'oriente sous l'action d'un champ électrique

$$\vec{P} = N \vec{p} \mathcal{L}(a) \quad (1.16)$$

où $a = \frac{pE_L}{k_B T}$ et $\mathcal{L}(a)$ est la *fonction de Langevin*.

1.5.4 Polarisation d'un déplacement macroscopique

L'application d'un champ électrique stationnaire induit des déplacements macroscopiques à l'échelle du matériau : c'est le cas de la polarisation des conducteurs et de la polarisation d'un jonction p-n.

2 CHAMP DE DÉPOLARISATION

2.1 Cas particulier d'un condensateur

Les charges libres, de densité σ_{libre} créent un champ électrique \vec{E}_0 ayant pour expression

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_{\text{libre}}}{\varepsilon_0} \vec{u} \quad (2.1)$$

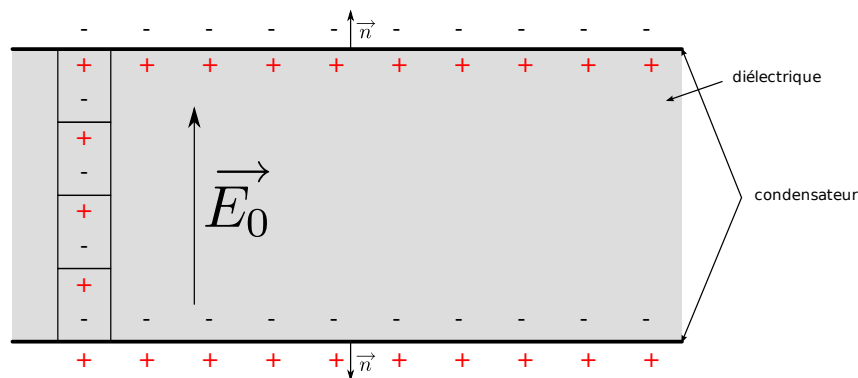


FIG. 2 – Exemple d'un condensateur

Ce champ induit dans le diélectrique une polarisation \vec{P} colinéaire à \vec{E}_0 et de même sens. Sur les faces du diélectrique, il apparaît, dû à la présence de ce champ, des charges de polarisation de densité

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (2.2)$$

La polarisation est donc à l'origine d'un nouveau champ \vec{E}_p qui vaut

$$\begin{aligned} \vec{E}_p &= -\frac{|\sigma_p|}{\varepsilon_0} \vec{n} \\ \vec{E}_p &= -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donc le champ total vaut

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{macro}} &= \vec{E}_0 + \vec{E}_p \\ &= \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le champ \vec{E}_p qui a sa source dans le phénomène de polarisation et qui est opposé à \vec{E}_0 s'appelle *champ de dépolariation*. Le champ \vec{E}_0 est appelé champ extérieur (appliqué au diélectrique).

2.2 Cas général

Pour des diélectriques ellipsoïdaux, si P_x , P_y et P_z sont les composantes de la polarisation \vec{P} par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde, les composantes de \vec{E}_p valent :

$$E_{P_x} = -N_x \frac{P_x}{\varepsilon_0} \quad (2.5a)$$

$$E_{P_y} = -N_y \frac{P_y}{\varepsilon_0} \quad (2.5b)$$

$$E_{P_z} = -N_z \frac{P_z}{\varepsilon_0} \quad (2.5c)$$

où N_x , N_y et N_z sont les facteurs de dépolariation. On a de plus

$$N_x + N_y + N_z = 1 \quad (2.6)$$

En résumé on a donc :

$$\vec{E}_p = -\frac{\vec{N} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (2.7)$$

$$\vec{E}_{\text{macro}} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{N} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad (2.8)$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad (2.9)$$

Forme	N_x	N_y	N_z
Sphère	$1/3$	$1/3$	$1/3$
Cylindre d'axe de révolution \hat{e}_z	$1/2$	$1/2$	0
Lame ou disque de normale \hat{e}_z	0	0	1

TAB. 1 – Facteurs dépolarisants usuels

3 CHAMP LOCAL ET MACROSCOPIQUE

3.1 Définitions

Le *champ macroscopique*, c'est à dire le champ total vu à grande distance du solide, est défini par

$$\vec{E}_{\text{macro}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \quad (3.1)$$

où \vec{E}_0 est le champ extérieur appliqué, et \vec{E}_p le champ dépolarisant.

Le *champ local*, à l'intérieur du solide, est défini par

$$\vec{E}_{\text{local}} = \vec{E}_{\text{macro}} + \vec{E}_L + \vec{E}_{\text{dip}} \quad (3.2)$$

\vec{E}_L est le *champ de la cavité de Lorentz* : le champ dû à la polarisation des charges sur la surface interne d'une cavité sphérique creusée de façon fictive dans l'échantillon, l'atome étant choisi au centre (la cavité n'enlève finalement que l'atome central).

\vec{E}_{dip} est le champ des atomes intérieur à la cavité. Pour un site cubique, la symétrie du problème fait que ce champ est nul.

Remarque : C'est le seul champ qui dépende de la structure du cristal.

3.2 Champ de Lorentz

Il s'agit de calculer en M le champ créé par les charges de polarisation dispersées sur la sphère. La densité surfacique est donnée par

$$\sigma_p(M) = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (3.3)$$

où \vec{n} est la normale extérieure au diélectrique (c'est à dire dans notre cas, dirigée vers l'intérieur de la cavité).

$$\sigma_p(M) = -P \cos \theta \quad (3.4)$$

En raison de la symétrie cylindrique d'axe z , la résultante du champ électrique sera portée par l'axe z .

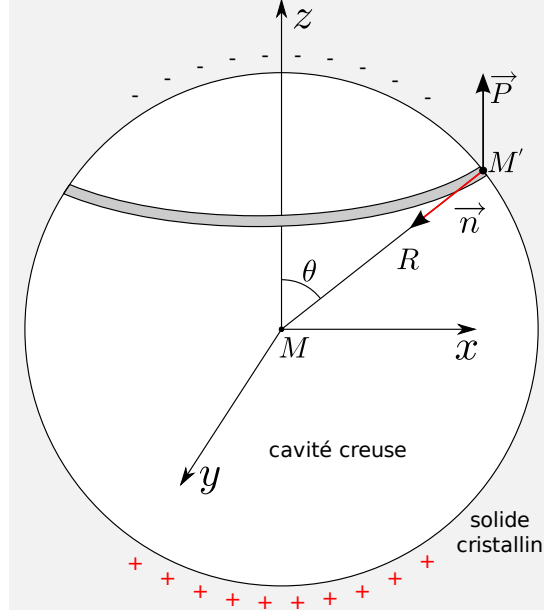


FIG. 3 – Représentation schématique de la cavité de Lorentz

$$\vec{E} = \int \frac{\sigma_p(M') dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{M'M}}{r_{M'M}^2} \quad (3.5)$$

L'élément de surface est une couronne sphérique. Le rayon de cette couronne est $R \sin \theta$ où R est le rayon de la sphère de Lorentz. La surface de cette couronne est donc sa circonférence fois sa largeur. La largeur vaut $R d\theta$ et la circonférence $2\pi R \sin \theta$.

Par ailleurs, le vecteur \vec{n} peut se décomposer de la façon suivante :

$$\vec{n} = -\cos \theta \hat{e}_z - \sin \theta \hat{e}_x \quad (3.6)$$

Remarque : On se place dans le plan (xOz) pour simplifier les calculs, les axes \hat{e}_x et \hat{e}_y jouant des rôles parfaitement équivalents.

L'expression du champ électrique devient :

$$\begin{aligned} \vec{E}_L &= \int \frac{P \cos \theta 2\pi R \sin \theta R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} (\cos \theta \hat{e}_z + \sin \theta \hat{e}_x) \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^\pi P \cos \theta \sin \theta (\cos \theta \hat{e}_z + \sin \theta \hat{e}_x) d\theta \\ &= \frac{P}{2\epsilon_0} \left\{ \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta \hat{e}_z d\theta + \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta \hat{e}_x d\theta \right\} \\ &= \frac{P}{2\epsilon_0} \left\{ \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \hat{e}_z \right]_0^\pi + \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \hat{e}_x \right]_0^\pi \right\} \\ &= \frac{P}{3\epsilon_0} \hat{e}_z \\ &= \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.3 champ local pour un site cubique

Le *champ local* vaut, pour un site cubique :

$$\vec{E}_{\text{local}} = \vec{E}_{\text{macro}} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \quad (3.8)$$

$$\vec{E}_{\text{local}} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \quad (3.9)$$

3.4 Relation de Clausius-Mossotti

Cette relation a pour but de lier les relations macroscopiques et microscopiques d'un milieu. Macroscopiquement, on a la relation de la *polarisabilité* \vec{P} qui vaut :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_{\text{macro}} \quad (3.10)$$

La polarisabilité est reliée aux moments dipolaires microscopiques de la façon suivante :

$$\vec{P} = N \vec{p} \quad (3.11)$$

où N est le nombre de moments dipolaires \vec{p} par unité de volume.

DÉFINITION 4

Quand le champ local est suffisamment faible (on ne détruit rien), la relation entre le moment dipolaire \vec{p} et \vec{E}_{local} est linéaire, on pose alors :

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{local}} \quad (3.12)$$

où α est la *polarisabilité* de l'édifice (α a la dimension d'un volume)

On part de la relation (3.11) et on utilise la relation (3.12) pour réécrire \vec{p} :

$$\vec{P} = N \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{local}} \quad (3.13)$$

On utilise la relation (3.8)

$$= N \varepsilon_0 \alpha \left(\vec{E}_{\text{macro}} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} \right) \quad (3.14)$$

$$\vec{P} \left(1 - \frac{N\alpha}{3} \right) = N \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{macro}} \quad (3.15)$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}} \vec{E}_{\text{macro}} \quad (3.16)$$

On identifie les termes par rapport à l'équation (3.10) et il vient :

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}} \quad (3.17)$$

On sait de plus que

$$\varepsilon_r = 1 + \chi \quad (3.18)$$

d'où

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}} \quad (3.19)$$

$$(\varepsilon_r - 1)\left(1 - \frac{N\alpha}{3}\right) = N\alpha \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_r - 1 = N\alpha + \frac{N\alpha}{3}(\varepsilon_r - 1) \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{N\alpha}{3}(3 + \varepsilon_r - 1) \quad (3.22)$$

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3} \quad (3.23)$$

On a ainsi redémontré la *relation de Clausius-Mossotti*

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3} \quad (3.24)$$

INDEX

C

champ	
de Lorentz	8
dépolariseur	4, 7
local	8, 10
macroscopique	4, 8
charge liée	4
conducteur	4

D

diamagnétisme	6
dipôle	3
diélectrique	4
domaine de Weiss	5

E

équation	
de continuité	3
de Maxwell	3

F

ferromagnétisme	5
fonction	
de Langevin	6

I

isolant	4
---------	---

P

paramagnétisme	5
parois de Bloch	5
polarisabilité	10
polarisation	4
atomique	6
d'un déplacement macroscopique	6
électronique	6
d'orientation	6

R

relation de Clausius-Mossotti	10, 11
-------------------------------	--------

S

supraconductivité	6
susceptibilité diélectrique	3, 5